

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 016

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Mr. J. van IJzeren

25 november 1959

Definitie van $\log z$ en e^z door middel van rijen



1959

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Mr J. van IJzeren

25 november 1959

Definitie van $\log z$ en e^z door middel van rijen

1. Inleiding.

In de elementaire analyse definieert men $\log x$ en e^x gewoonlijk bij de differentiatieregels nadat tevoren $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ is behandeld. Of men kiest de fundamentele weg met $\int_1^a x^{-1} dx$ als definitie van $\log a$.

We vergelijken niet, beide methoden zijn voortreffelijk, en toch is er kritiek. Zo maakt Sawyer in Mathematician's Delight de opmerking dat de gebruikelijke "explanations of e are excellent and logical, but leave the reader with the feeling that everything has come from the blue".

Genoemde methoden sluiten in ieder geval niet direct aan bij de schoolalgebra. Deze schenkt veel aandacht aan de functie a^x , waarbij onmeetbare x geen wezenlijk bezwaar opleveren (a^x is continu voor meetbare x en, per definitie, voor onmeetbare x). Door bij deze kennis aan te knopen (2) kunnen we "the blue" wellicht elimineren; we proberen aanschouwelijk en tevens streng te zijn. Vervolgens (3 t/m 7) laten we zien dat de gekozen gedachtegang tot in het complexe gebied reikt.

2. De grafiek van $y=a^x$ i.v.m. de rijen $n(\sqrt[n]{a}-1)$ en $n(1-1/\sqrt[n]{a})$.

Laat a een vast positief getal zijn, dan geldt:

De helling van $y=a^x$ in $(0,1)$ is gelijk aan $\log a$ met grondtal $e \approx 2,7$.

"Aanschouwelijk bewijs". $y=x+1$ snijdt $y=2^x$ in $(1,2)$ en $y=4^x$ in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; dus vinden we in $(0,1)$ een helling < 1 bij $y=2^x$ en > 1 bij $y=4^x$. Blijkbaar heeft $y=e^x$ met zekere e tussen 2 en 4 in $(0,1)$

de helling 1 (definitie van e); $y=e^x \log a = a^x$ loopt log a maal zo steil. q.e.d. Rest e wat nauwkeuriger te bepalen.

Bij elke $a \neq 1$ is de grafiek van $y=a^x$ hol naar boven ¹⁾; dus is $(a^x-1)/x$ een stijgende functie van x, die bij $x=0$ de waarde log a passeert. Nemen we $a=e$ en $x=1/n$ dan volgt dus: $1 < n(e^{1/n}-1)$ zodat $(1+1/n)^n < e$; en met $x=-1/(n+1)$ vinden we $e < (1+1/n)^{n+1}$; $n=1024$ geeft $2,717 < e < 2,720$.

Algemeen vinden we (voor $a \neq 1$)

$$n(a^{1/n}-1) > \log a > n(1-a^{-1/n}) \quad a \neq 1.$$

$a=10$ en $n=1024$ geven $2,305 > \log 10 > 2,300$.

Het voorgaande is zonder veel omhaal streng te maken.

$$(2.1) \quad n(a^{1/n}-1) \geq (n+1)(a^{1/(n+1)}-1) \quad a > 0.$$

Bewijs. In $c=a^{1/n(n+1)}$ luidt dit $n(c^{n+1}-1) \geq (n+1)(c^n-1)$ of $(c-1)(nc^n-c^{n-1}-\dots-1) \geq 0$, wat kennelijk juist is, voor $c > 1$, $=1$, <1 .²⁾

Blijkbaar is $l_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$ een dalende rij, $n(\sqrt[n]{1/a}-1)$ ook, dus $l'_n = n(1-1/\sqrt[n]{a})$ een stijgende.

$$(2.2) \quad n(\sqrt[n]{a}-1) \text{ en } n(1-1/\sqrt[n]{a}) \text{ naderen dalend resp. stijgend tot één limiet } l(a).$$

Bewijs. Volgens $l_n - l'_n = \sqrt[n]{a} l'_n - l'_n = n^{-1} l_n l'_n$ blijft $l_n \geq l'_n$, zodat beide begrensd zijn en $n^{-1} l_n l'_n \downarrow 0$; er is dus één limiet $l(a)$.

We zien dat $l(1/a) = -l(a)$, en dat voor $a > 1$ $l(a) > 1-1/a > 0$.

$$(2.3) \quad \text{Er is een grondtal } e \text{ zó dat } l(x) = e^{\log x}.$$

Bewijs. Bij meetbare p/q is $l(a^{p/q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} np(a^{1/nq}-1) = p/q \cdot l(a)$.

Is $a \neq 1$ en $e = a^{1/l(a)}$, dan volgt $l(e) = 1$, en algemeen $l(x) = y$ bij $x = e^y$. Blijkbaar is $e > 1$, en onafhankelijk van a.

De aanschouwelijke behandeling brengt e en log x in het bereik van de schoolalgebra. Wie méér wil vindt in l_n en l'_n instructieve hulpmiddelen. Deze rijen hangen direct samen met $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$. Zij zijn de grondslag van Briggs' berekening van logarithmen. Voorts "verklaart" l_n het langzaam stijgen van log x: als $x \rightarrow \infty$ dan blijft

1) Dit volgt uit $a^{x+h} + a^{x-h} > 2a^x$

2) (2.1) is equivalent met de ongelijkheid van Bernoulli ($a=(1+h)^{-n(n+1)}$) geeft $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$.

$$n(x^{1/n}-1) > \log x \quad (n \text{ vast})$$

dus $\log x/x^{2/n} \rightarrow 0$, hoe klein $2/n$ ook zij.

Tenslotte: l_n en l'_n staan in nauwe relatie met da^x/dx en $\int_1^a x^{-1}dx$:
 l_n en l'_n zijn speciale gevallen van het differentiequotiënt $(a^h-1)/h$;
 voor $h \rightarrow 0$ nadert dit tot de met l_n en l'_n gedefinieerde $\log a$ want

$$a^{h-1} \geq \log(a^h) = h \log a \text{ en } a^{h-1} \leq a^h \cdot h \log a.$$

l_n en l'_n zijn boven- en benedensom bij $\int_1^a x^{-1}dx$:

$$n(a^{1/n}-1) = \sum_{i=1}^n \frac{a^{i/n}-a^{(i-1)/n}}{a^{(i-1)/n}} > \int_1^a \frac{dx}{x} > \sum_{i=1}^n \frac{a^{i/n}-a^{(i-1)/n}}{a^{1/n}} = n(1-a^{-1/n}).$$

Aldus is verband gelegd met beide in de aanhef vermelde definities.

Een rechtstreekse behandeling van $\lim_{h \rightarrow 0} (a^h-1)/h$, zonder tussenstap over $h=\pm 1/n$, is te vinden in N.G. de Bruyn, Beknopt leerboek der differentiaal- en integraalrekening. Daar worden de waarden van h geheel vrijgelaten, wat evenwel uitgebreider hulpmiddelen (differentiaalrekening) nodig maakt.

Een ander uiterste vindt men in E. Landau, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung. Hierin wordt h tot de waarden 2^{-k} beperkt, d.w.z. Landau gebruikt voor het definieren van $\log a$ alleen $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$, enz.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (\sqrt[n]{a}-1) = \log a.$$

Door Landau's voorschrift enigszins te wijzigen kunnen we er $\log z$ en e^z met complexe z ook mee definieren, en de goniometrische en cyclometrische functies onafhankelijk van de meetkunde funderen. Zonder aan didactische mogelijkheden te denken vinden we een verband met de schoolmeetkunde in de zg. verdubbelingsformule.

3. Symmetrische varianten van Landau's $2^k(\sqrt[n]{x}-1)$.

We maken ons geheel los van het voorgaande en beschouwen

$$s_n(x) = \frac{n}{2} (\sqrt[n]{x}-1/\sqrt[n]{x}) \text{ en } t_n(x) = n \frac{\sqrt[n]{x}-1/\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x+1}/\sqrt[n]{x}} \quad n = 2^k$$

Stilzwijgend beperken we ons steeds tot $n = 2^k$.

Evenals $\log x$ veranderen de s_n en t_n van teken als x door $1/x$ wordt vervangen. Zij naderen tot één limiet, en wel van weerszijden. Dit blijkt uit de betrekkingen met

$$(3.1) \quad c_n(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x} + 1/\sqrt[n]{x} \right) > 1$$

$$s_n/s_{2n}=c_{2n} > 1, \quad t_n/t_{2n}=\frac{1}{2}(1+c_n^{-1}) < 1, \quad s_n/t_n=c_n > 1.$$

In woorden: s_n neemt af, t_n neemt toe ¹⁾, zij naderen tot elkaar, convergeren dus en $c_n \rightarrow 1$.

We definiëren nu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log x.$$

Uit de identiteit

$$s_n(x_1)c_n(x_2) + c_n(x_1)s_n(x_2) = s_n(x_1x_2)$$

volgt als $n \rightarrow \infty$

$$\log x_1 + \log x_2 = \log(x_1x_2).$$

Hieruit is op de bekende manier $\log(x^y) = y \log x$ af te leiden. Blijkbaar geldt

$$(3.2) \quad s_n(x) > \log x > t_n(x) \quad x > 1.$$

Substitutie van $x=10$ geeft bij $n=1024$

$$2,302587 > \log 10 > 2,302581,$$

een veel betere (kwadratische) benadering, dan de in 2 gevondene.

Substitutie van $x=x_2/x_1 > 1$ en $n=2$ in (3.2) geeft

$$(3.3) \quad \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1 x_2}} > \log(x_2/x_1) > \frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} \quad x_2 > x_1$$

Uit deze reeds door Napier gehanteerde betrekking ²⁾ volgt de monotonie, continuïteit en differentieerbaarheid van $\log x$ (afgeleide in x_1 : $\lim_{x_2 \rightarrow x_1} (\log x_2 - \log x_1)/(x_2 - x_1) = 1/x_1$).

De inverse functie is e^x , met nader te bepalen e .

1) D.w.z. $|s_n|$ daalt, $|t_n|$ stijgt.

2) Zie T.J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, Appendix II.

Een andere voorstelling vinden we door proberenderwijs

$$t_n(y) = n(\sqrt[n]{y}-1/\sqrt[n]{y})/(\sqrt[n]{y}+1/\sqrt[n]{y}) = x \text{ naar } y \text{ op te lossen.}$$

Dit geeft $y=e_n(x)$ waarin

$$(3.4) \quad e_n(x) = \left(\frac{1+x/n}{1-x/n} \right)^{n/2} \quad x < n = 2^k.$$

Met Napier's ongelijkheid (3.3) vinden we

$$(3.5) \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2/n^2}} > \log e_n(x) > x \quad x > 0.$$

Blijkbaar geldt voor elke x $\lim_{n \rightarrow \infty} \log e_n(x) = x = \log e^x$ dus

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = e^x.$$

Met $x=1$ en $n=1024$ wordt het linkerlid van (3.5) 1,0000005; de corresponderende benadering van e nl. 2,718282 wordt gevonden door $1025/1023 = 1,001955034$ negenvoudig te kwadrateren.

4. Unitaire getallen en hun vierkantswortels.

Landau's beperking tot $n=2^k$ wordt belangrijk bij complexe getallen. Daar is nl., zoals aanstonds blijkt, kwadraatworteltrekken zeer wel uitvoerbaar, terwijl n -de worteltrekking met $\sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$ vooralsnog onmogelijk is. We moeten immers $\cos$ en $\sin$ nog definiëren (na e^{iy}). Elk steunen op de meetkunde willen we vermijden.

Gemakkelijk zijn complexe getallen aan te wijzen waarbij een imaginaire logarithme is te verwachten. Immers $\log u = iy$ impliceert allicht $\log u^{-1} = -iy = \overline{iy} = \log \bar{u}$. Het gaat dus om getallen u die voldoen aan

$$1/u = \bar{u}.$$

Zulke u noemen we unitair; elk getal $x+iy$ met $x^2+y^2=1$ is unitair, want $1/(x+iy) = (x-iy)/(x^2+y^2) = x-iy$. Bijv. 1; -1; i; -i; $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ ($=\sqrt{i}$); elk quotient $(a+ib)/(a-ib)$.

Het product van twee u 's is eveneens unitair:

$$1/(u_1 u_2) = 1/u_1 \cdot 1/u_2 = \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \overline{u_1 u_2}.$$

Elk complex getal $x+iy$ kan worden ontbonden in een positieve

1) De symmetrische rij $(\sqrt{1+x^2/n^2} + x/n)^n$ (omkering van s_n) blijft buiten beschouwing.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en een unitaire $u = (x + iy) / \sqrt{x^2 + y^2}$. Bij vermenigvuldiging van complexe getallen vormen deze factoren afzonderlijke producten:

$$(r_1 u_1)(r_2 u_2) = (r_1 r_2)(u_1 u_2) = ru.$$

Hierbij past kennelijk, dat $\log r$ reëel en $\log u$ imaginair is. Het laatste zullen we nu waar maken met dezelfde hulpmiddelen als in het reële geval nl. met kwadraatwortels.

We bepalen $\sqrt{u}$ op een symmetrische manier tezamen met $1/\sqrt{u}$.

$$(4.1) \quad \sqrt{u} + 1/\sqrt{u} = \sqrt{2+u+1/u}$$

$$(4.2) \quad \sqrt{u} - 1/\sqrt{u} = (u-1/u)/(\sqrt{u+1/\sqrt{u}}) \quad u \neq -1.$$

In (4.1) is $2+u+1/u = (u+1)(\bar{u}+1) \geq 0$ met minimum 0 als $u = -1$; $\sqrt{u} - 1/\sqrt{u}$ is evenals $u-1/u = u-\bar{u}$ imaginair, en van hetzelfde teken. Blijkbaar zijn $\sqrt{u}$ en $1/\sqrt{u}$ toegevoegd complex, dus (definitie) unitair; hun reëel deel is positief (in tegenstelling met $-\sqrt{u}$ en $-1/\sqrt{u}$ die eveneens wortels zijn van u resp. $1/u$).

Er is één uitzondering, $u = -1$, waarbij het reële deel der wortels 0 is. We kiezen $\sqrt{-1} = i$ ¹⁾, dus $1/\sqrt{-1} = 1/i = -i$; maar de algemene regel $1/\sqrt{u} = \sqrt{1/u}$ is hier niet te redden.

Het symmetrische worteltrekken kan ook op positieve x worden toegepast; het levert dan - geïtereerd - juist de vormen $\sqrt[n]{x+1/\sqrt[n]{x}}$ en $\sqrt[n]{x}-1/\sqrt[n]{x}$ die in $s_n(x)$ en $t_n(x)$ optreden.

5. $\log u$ en de zg. verdubbelingsformule.

De definitie van $\log u$ loopt geheel parallel met die van $\log x$. We moeten alleen ongelijktekens omkeren in verband met de volgende tegenstelling tussen positieve x en unitaire u :

$$\frac{1}{2}(x+1/x) > 1 \text{ want } (\sqrt{x}-1/\sqrt{x})^2 > 0, \text{ tenzij } x=1$$

$$\frac{1}{2}(u+1/u) < 1 \quad " \quad (\sqrt{u}-1/\sqrt{u})^2 < 0, \quad " \quad u=1.$$

Analoog met (3.1) hebben we

$$(5.1) \quad c_n(u) = \frac{1}{2}(\sqrt[n]{u} + 1/\sqrt[n]{u}) < 1.$$

Ook nu vinden we tot elkaar naderende $s_n(u)$ (toenemend) en $t_n(u)$ (afnemend), die van weerszijden naar één limiet gaan. We definiëren daarmee $\log u$:

1) Conventie; tegen $\sqrt{-1} = -i$ is geen wezenlijk bezwaar.

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\sqrt[n]{u-1} / \sqrt[n]{u} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt[n]{u-1} / \sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{u+1} / \sqrt[n]{u}} = \log u.$$

Evenals de termen van deze rijen $s_n(u)$ en $t_n(u)$ is $\log u$ imaginair met het teken van $u-1/u$; als dit positief is vinden we

$$(5.3) \quad s_2(u) = \sqrt{u-1} / \sqrt{u} < \log u < z \frac{\sqrt{u-1} / \sqrt{u}}{\sqrt{u+1} / \sqrt{u}} = t_2(u).^{1)}$$

Bijv. $\log i$ ligt tussen $(i-1)/\sqrt{i} = \sqrt{2}(i-1)/(1+i) = \sqrt{2}i$ en $2(i-1)/(1+i) = 2i$. Als we u variëren dan blijkt uit (4.1) dat $\sqrt{u+1}/\sqrt{u}$, $\sqrt[4]{u+1}/\sqrt[4]{u}$, enz. toe-en afnemen met $u+1/u$, terwijl de imaginaire $\sqrt{u-1}/\sqrt{u}$ enz. tegengesteld variëren:

$$\left\{ (\sqrt{u-1}/\sqrt{u})/i \right\}^2 = 2 - u - 1/u.$$

Een toename van $\sqrt{u-1}/\sqrt{u} = s_2(u)$ impliceert (omdat $\frac{1}{2}(\sqrt[4]{u+1}/\sqrt[4]{u})$ afneemt) een grotere toename van $2(\sqrt[4]{u-1}/\sqrt[4]{u}) = s_4(u)$, enz. dus uiteindelijk een grotere toename van $\log u$. Conclusie:

(5.4) Als $\log u$ tot een limiet nadert, dan ook $\sqrt{u-1}/\sqrt{u}$, dus u . Blijkbaar zijn $\sqrt{u-1}/\sqrt{u}$ enz. en $\log u$ maximaal als $u+1/u$ minimaal is d.w.z. als $u = -1$. De bijbehorende $s_2(-1)$ t/m $s_{16}(-1)$ zijn:

$$2i; \quad 2\sqrt{2}i = 2,81; \quad 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = 3,061; \quad 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3,121.$$

De limiet, $\log(-1)$, noemen we πi

$$\log(-1) = \pi i.$$

Deze uitkomst vraagt om meetkundige toelichting. We gaan daartoe terug naar de bepaling van $\sqrt{u}$ en duiden de unitaire getallen $1, -1, u, 1/u, \sqrt{u}$ en $1/\sqrt{u}$ aan door op $x^2 + y^2 = 1$ gelegen punten: $E(1,0)$, $E'(-1,0)$, u (boven EE'), $\bar{u}, v$ en $\bar{v}$. Als M en N de middens van $u\bar{u}$ resp. $v\bar{v}$ zijn, dan geldt i.v.m. (4.1) en (4.2):

$$UM/VN = (u-1/u)/(u-1/u) = \sqrt{2+u+1/u} = \sqrt{E'M \cdot E'E} = E'U = E'U/OV.$$

Dus is $OV/E'U$ d.w.z. OV is bissectrix van $\angle EOU$. Dit betekent dat koorde $EU = V\bar{v} = (\sqrt{u-1}/\sqrt{u})/i = s_2(u)/i$; koorden $EV + VU = 2EV = s_4(u)/i$. We kunnen zo doorgaan. De berekening der koorden stemt geheel overeen met de zg. verdubbelsformule voor de koorde k_2 van de halve door k onderspannen boog

$$k_2^2 = 2 - \sqrt{4 - k^2}.$$

1) We gebruiken hier op vanzelfsprekende wijze ongelijktekens bij imaginaire getallen.

In de limiet vinden we: boog $EU = (\log u)/i$; in het bijzonder boog $EE' = (\log(-1))/i = \pi$.

$$6. e^{iy} = \lim_{\substack{n=2^k \\ \rightarrow \infty}} \left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n} \right)^{n/2} \text{ en } \text{Log } u = \log u + 2k\pi i.$$

Intussen klopt $\log(-1) + \log(-1) = 2\pi i$ niet met $\log\{(-1)(-1)\} = 0$. Toch is de aanduiding $\log u$ wel gerechtvaardigd want uit (5.2) volgt

$$(6.1) \quad \log(1/u) = -\log u \quad u \neq -1.$$

(6.2) $\log \sqrt{u} = \frac{1}{2} \log u$ en dus ook $\log \sqrt[m]{u} = 1/m \cdot \log u$ met $m=2^k$.
Speciaal: $\log i = \log \sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pi i$ en $\log(-i) = \log(1/i) = -\frac{1}{2} \pi i$.
Tegenover πi , het maximum van $\log u$, staat $-\pi i$ als benedengrens

$$-\pi i < \log u \leq \pi i.$$

Als u de waarde -1 passeert, dan heeft $\log u$ een sprong van $2\pi i$.

Vervangen we $\sqrt[m]{u}$ in (6.2) door u dan volgt (voor $m=2^k$)

$$(6.3) \quad m \log u = \log(u^m) \text{ mits } -\pi i < m \log u \leq \pi i.$$

Er is dus duidelijke analogie met de reële $\log x$, behalve t.a.v. de begrenstheid. De inverse functie evenwel voert hierboven uit.

Om een getal met iy als logaritmie te vinden gaan we (zie het reële geval (3.4)) $u = (1+iy/n)/(1-iy/n)$ substitueren in (5.3). Dit geeft, als $y > 0$ ¹⁾ (voor $y < 0$ analoog)

$$(6.4) \quad \frac{iy}{\sqrt{1+y^2/n^2}} < \frac{n}{2} \log \frac{1+iy/n}{1-iy/n} < iy \quad y > 0.$$

Is $y \leq \pi$ dan mogen we volgens (6.3) $n/2$ als exponent schrijven. We vinden dus

$$(6.5) \quad \log \frac{1+iy/n}{1-iy/n}^{n/2} \rightarrow iy \quad \text{als } n=2^k \rightarrow \infty.$$

Dit impliceert (zie conclusie (5.4)) dat

$$(6.6) \quad \left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n} \right)^{n/2} \rightarrow e^{iy},$$

waarin e^{iy} aanduidt: het unitaire getal met logaritmie iy .

Deze notatie past bij $e^{\log u} = u$, en geeft in het bijzonder $e^{\pi i} = -1$.

Laat nu $y > \pi$, maar $y^* = y/2^k \leq \pi$. Dan heeft het linkerlid van (6.6) met y^* i.p.v. y een limiet. Door deze y^* -rij k -voudig te kwadra-

1) D.w.z. $u-1/u > 0$, vereist voor (5.3).

teren krijgen we de y-rij ((6.6) met $n \cdot 2^k$ i.p.v. n). De laatste moet dus ook een limiet hebben.

Dus bestaat de limiet (6.6) voor elke y. De notatie e^{iy} past bij e^x (zie (3.6)) en bij het additietheorema

$$(6.7) \quad e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}.$$

Om dit te bewijzen vormen we het product van de rijen voor e^{iy_1} , e^{iy_2} en $e^{-i(y_1+y_2)}$; de algemene term blijkt te zijn het unitaire getal

$$u_n = \left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n} \right)^{n/2} \quad \text{met } y = \frac{y_1 y_2 (y_1+y_2)}{n^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}.$$

Als $n \rightarrow \infty$ dan $y \rightarrow 0$ en volgens (6.4) ook $\log u_n \rightarrow 0$; dus $u_n \rightarrow 1$ d.w.z. $e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \cdot e^{-i(y_1+y_2)} = 1$, wat hetzelfde is als (6.7).

Een bijzondere consequentie van (6.7) is dat voor elke gehele k

$$e^{2k\pi i} = (e^{\pi i})^{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

Dus zijn er vele imaginaire e-machten die hetzelfde unitaire getal u opleveren:

$$e^{\log u + 2k\pi i} = u.$$

Verder volgt uit

$$e^{\log(u_1 u_2)} = u_1 u_2 = e^{\log u_1} \cdot e^{\log u_2} = e^{\log u_1 + \log u_2}$$

dat $\log(u_1 u_2)$ en $\log u_1 + \log u_2$ gelijk zijn op een veelvoud van $2\pi i$ na.

Blijkbaar behoort bij u een verzameling logaritmen $\text{Log } u$, die alle $2k\pi i$ van de hoofdwaaarde $\log u$ verschillen.

7. Verdere uitwerking en samenvatting.

$\cos y$ en $\sin y$ kunnen we nu definiëren met

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Gemakkelijk zijn hun eigenschappen uit die van e^{iy} af te leiden. We vermelden alleen dat de ongelijkheid

$$\sin y < y < \tan y \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

dezelfde is als (5.3) (neem $u = e^{2iy}$) en dat $\lim_{y \rightarrow 0} \sin y / y = 1$ overeenkomt met

$$\lim_{y \rightarrow 0} (e^{iy} - 1)/iy = 1.$$

Voor $\arctan y = \varphi$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) vinden we de betrekking

$$\log \frac{1+iy}{1-iy} = \log \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \log e^{2i\varphi} = 2i\varphi = 2i \arctan y \text{ zodat}$$

(6.5) neerkomt op

$$ni \arctan (y/n) \rightarrow iy.$$

Evenzo zijn de limieten voor $\log u$ en ook de symmetrische worteltrekking te vertalen in $\sin$, $\cos$ en $\tan$.

We definiëren bij $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$)

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \text{ en } \log z = \log r + i\varphi.$$

$$\text{Dan geldt } e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{\log z} = z$$

$$\text{en mod. } 2k\pi i \quad \log(z_1 z_2) \equiv \log z_1 + \log z_2, \quad \log e^z \equiv z.$$

Als h reëel is dan geldt voor elke z

$$\lim_{h \rightarrow 0} (z^h - 1)/h = \log z \text{ en } \lim_{h \rightarrow 0} (1 + hz)^{1/h} = e^z. \quad 1)$$

In deze limieten liggen alle voorgaande besloten. Beide zijn af te leiden (door $h \log z$ resp. $\log(1 + hz) = x + iy$ te stellen) uit

$$\lim_{x+iy \rightarrow 0} \frac{e^{x+iy} - 1}{x+iy} = 1.$$

Deze limiet volgt uit de identieke betrekking

$$\frac{e^{x+iy} - 1}{x+iy} - 1 = \frac{x}{x+iy} \left(\frac{e^x - 1}{x} \cdot e^{iy} - 1 \right) + \frac{iy}{x+iy} \left(\frac{e^{iy} - 1}{iy} - 1 \right),$$

waarin beide haken naar 0 gaan met x en y .

Met deze complexe limiet zijn we teruggekeerd "boven" ons uitgangspunt $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$, en terechtgekomen bij de complexe afgeleide van e^z .

1) $z^h \stackrel{\text{def}}{=} e^{h \log z}$